数理解析研究所講究録
348巻 1979年 138-152

Some notes on the theory of holomorphic curves.

名 大・教養 戸田暢茂
三重大・教育 鈴木順二

1. 序

正則曲線の理論については、Ahlfors [2]、Cowen-Griffiths [4]、Weyl [5]、Wu [6] にそれぞれの方法で詳しく述べられているが、ここでは、正則曲線の order functions に関するいくつかの注意を与え、これらを応用することにより、いくつかの場合について、より精密な結果を述べる。

$$x : |z| < R \to P^n(\mathbb{C}) \quad (n \geq 1, \; 0 < R \leq \infty)$$

を非退化な正則曲線、その1つの既約表現を

$$X = (x_1(z), \cdots, x_{n+1}(z))$$

とする。ここに $x_i(z)$ $(i = 1, \cdots, n+1)$ は共通零点をもたない $|z| < R$ での正則函数である。x の階数 p の associated curves を x^p とすると、x^p は Plücker 座標を用いて

$$X^p = [X, dX/dz, \cdots, d^{p-1}X/dz^{p-1}]$$

と表現される。このとき $X^1 = X$ である。x^p $(p = 1, \cdots, n)$ の

order function を $T_p(r)$ とする。このとき第二主要定理として

(1) $V_p(r)+\{T_{p+1}(r)-2T_p(r)+T_{p-1}(r)\}=\Omega_p(r)-\Omega_p(r_0)$

$(r_0<r<R)$ が成立することは、よく知られている。ここに r_0 は正定数、$V_p(r)$ は x の階数 p の stationary indices に関する個数函数、

$$\Omega_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{|X^{p+1}|\cdot|X^{p-1}|}{|X^p|^2}d\theta \quad (z=re^{i\theta})$$

である (Weyl [5], p123)。

正則曲線の理論においては、この $\Omega_p(r)$ を order function $T_p(r)$ によって評価することが本質的な事柄の1つであり、例えば、「$R=\infty$ の場合、任意の $\alpha>1$ に対して、不等式

$$2\Omega_p(r)\leqq\alpha\log T_p(r)-2\log r+O(1)$$

が $E\subset[r_0,\infty)$ かつ $\int_E r^{-1}dr<\infty$ なる閉集合 E の外で成立する。」(Weyl [5], III章) ことが知られている。

$R<\infty$ の場合も、これと同様な不等式が成立している (Weyl [5], IV章)。Weyl [5] では独立変数として $\log r$ $(|z|=r)$ を用いているが、ここでは常に r を用いることに注意する。

正則曲線に関する「Defect relations」を証明するとき $\Omega_p(r)$ の上の様な評価式は、本質的役割をはたし、よって必然的に「Defect relations」を証明するのに必要な、多くの不等式には、除外集合が伴う (Ahlfors [2], Weyl [5] etc)。

他方、$|z|<R$ での有理型函数の Nevanlinna 理論においては、$|z|<R$ における非常数、位数有限な有理型函数 $f(z)$ に対しては、オニ基本定理は、除外集合なしで成立している。但し、$R<\infty$ のときは

$$\overline{\lim_{r\to R}}\ \log T(r,f)\Big/\log\frac{1}{R-r}=\infty$$

と仮定する。又 $|z|<R$ における正則函数系についても、Cartan [3] により同様な結果が得られている。

以下、上で述べた有理型函数の場合と同様に、正則曲線の場合においても、$T_1(r)$ が有限位数のとき、Ahlfors [1] において用いられた手法を用いて、除外集合を取り除くことが出来ること、及び $R<\infty$ の場合の仮定 "$\mathfrak{R}$" (Weyl [5], p 201) が弱められること等を証明する。なお、記号等は主に Weyl [5] におけるものを用いる。

2、補助定理

後で用いるため、いくつかの補助定理を用意する。

補助定理 1. (Weyl [5], p155, p197)

$f(r)$ は $[r_0, R)$ で定義された函数で、非負かつ連続な導函数をもち、$f(r_0)\geqq 1$ とする。このとき任意の $\alpha>1$, $\mu\geqq 0$ に対して

I) $R=\infty$ のとき: $\quad f'(r)\leqq\{f(r)\}^{\alpha}r^{\mu-1}$

が $E\subset[r_0,\infty)$ かつ $\int_E r^{\mu-1}dr<(\alpha-1)^{-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

II) $R<\infty$ のとき：　$f'(r)\leq\{f(r)\}^{\alpha}(R-r)^{-\mu-1}$

が $E\subset[r_0,R)$ かつ $\int_E(R-r)^{\mu-1}dr<(\alpha-1)^{-\mu-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

補助定理 2.

$f(r)$, $F(r)$ は $[r_0,R)$ で定義され，$f(r)$ は連続で

$$1+\log\frac{r}{r_0}+\int_{r_0}^{r}(\log r-\log t)\exp(f(t))\frac{dt}{t}\leq F(r)$$

をみたすものとする。このとき、任意の $\alpha>1$, $\mu\geqq 0$ に対して

I) $R=\infty$ のとき：　$f(r)\leq\alpha^2\log F(r)+\mu(\alpha+1)\log r$

が $E\subset[r_0,\infty)$ かつ $\int_E r^{\mu-1}dr\leq 2(\alpha-1)^{-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

II) $R<\infty$ のとき：

$f(r)\leq\alpha^2\log F(r)+(\mu+1)(\alpha+1)\log\frac{1}{R-r}+(\alpha+1)\log r$

が $E\subset[r_0,R)$ かつ $\int_E(R-r)^{-\mu-1}dr\leq 2(\alpha-1)^{-1}$ なる開集合 E の外で成立する。

この補助定理は，補助定理 1 を用いることにより、Weyl [5], p156, p197 と同様に証明出来る。

定義　$R=\infty$ の場合で x が非退化であるとき、又は

$R<\infty$ の場合で、x が非退化かつ

(2) $$\lim_{r\to R}T_p(r)=\infty\quad(p=1,\cdots,n)$$

をみたすとき、正則曲線 x は admissible であるということにする。

注意　$R=\infty$ の場合には、x が非退化なら

$$\lim_{r\to\infty} T_p(r)=\infty \quad (p=1,\cdots,n)$$

は成立する（Weyl [5]）。

補助定理3.

$|z|<R$ における任意の admissible な正則曲線 x に対して、不等式

$$1+\log\frac{r}{r_0}+\int_{r_0}^{r}(\log r-\log t)\exp(2\tilde{\Omega}_p(t))\frac{dt}{t}\leqq 2T_p(r)$$

が任意の $r\in[R_0, R)$ $(R_0\geqq r_0)$ に対して成立する。ここに $\tilde{\Omega}_p(t)=\Omega_p(t)+\log t/r_0$ で、R_0 は曲線に依存して決る定数である。（Weyl [5], p 154, p 196 参照）

以後§2及び§3においては、曲線はすべて admissible であるとする。補助定理1, 2を戎々の曲線に応用すれば、補助定理3から、次の命題を得る。

命題1.

任意の $\alpha>1$, $\mu\geqq 0$ に対して

I)　$R=\infty$ のとき：

$$2\tilde{\Omega}_p(r)\leqq\alpha^2\log T_p(r)+\mu(\alpha+1)\log r+O(1)$$

が $E\subset[R_0,\infty)$ かつ $\int_E r^{\mu-1}dr<\infty$ なる開集合 E の外で成立する。

II) $R<\infty$ のとき：

$$2\tilde{\Omega}_p(r) \leq \alpha^2 \log T_p(r) + (\mu+1)(\alpha+1)\log\frac{1}{R-r} + O(1)$$

が $E\subset[R_0, R)$ かつ $\int_E (R-r)^{-\mu-1}dr<\infty$ なる用集合 E の外で成立する。

この命題を用いれば、Weyl [5] と同様にして次の命題が得られる。

命題 2.

任意の $\varepsilon>0$, $\mu\geq 0$ に対して r_1 が存在して次の不等式が成立する。

I) $R=\infty$ のとき：$E\subset[r_1,\infty)$ かつ $\int_E r^{\mu-1}dr<\infty$ なる用集合 E の外の任意の $r\geq r_1$ に対して

(3) $$T_{p+1}(r) < \left(1+\frac{1}{p}+\varepsilon\right)T_p(r) + O(\log r)$$

(4) $$T_{p-1}(r) < \left(1+\frac{1}{n+1-p}+\varepsilon\right)T_p(r) + O(\log r)$$

II) $R<\infty$ のとき：$E\subset[r_1, R)$ かつ $\int_E (R-r)^{-\mu-1}dr$ なる用集合 E の外の任意の $r\geq r_1$ に対して

(5) $$T_{p+1}(r) < \left(1+\frac{1}{p}+\varepsilon\right)T_p(r) + O\left(\log\frac{1}{R-r}\right)$$

(6) $$T_{p-1}(r) < \left(1+\frac{1}{n+1-p}+\varepsilon\right)T_p(r) + O\left(\log\frac{1}{R-r}\right)$$

3、定理とその応用

ここでは、$T_p(r)$ の位数を調べ、命題 1, 及び 2 を改良する。$T_p(r)$ の位数 ρ_p, 及び劣位数 λ_p は次の様に定義され

る。

$$R=\infty \text{ のとき}: \quad \rho_p = \varlimsup_{r\to\infty} \log T_p(r)/\log r$$
$$\lambda_p = \varliminf_{r\to\infty} \log T_p(r)/\log r$$
$$R<\infty \text{ のとき}: \quad \rho_p = \varlimsup_{r\to R} \log T_p(r)/\log \frac{1}{R-r}$$
$$\lambda_p = \varliminf_{r\to R} \log T_p(r)/\log \frac{1}{R-r}.$$

定理1.

すべての $T_p(r)$ の位数は等しい。

証明　$R=\infty$ の場合は、Ahlfors [2] により証明されている。よって $R<\infty$ の場合について、Ahlfors [1] で用いられた方法を応用して証明する。

$\rho_p<\infty$ と仮定する。このとき任意の $\rho>\rho_p$ に対して、$r_2\geq r_1$ なる r_2 が存在して、任意の $r\in[r_2,R)$ に対して

$$T_p(r)\leq O\left(\frac{1}{(R-r)^\rho}\right).$$

ここで命題2 II) (5) を応用する。(i) $r\notin E$ かつ $r_2\leq r<R$ なる任意の r に対しては、

$$T_{p+1}(r)\leq O\left(\frac{1}{(R-r)^\rho}\right).$$

(ii) 次に $r\in E$, $r_2\leq r<R$ なる r を考える。かかる r を含み、E の含まれる最長区間の右端点を r' とし、$\mu=\rho$ とおけば、

$$(R-r')^{-\rho}-(R-r)^{-\rho}\leq \rho\int_E (R-r)^{-\rho-1}dr = O(1).$$

よって　$(R-r')^{-\rho}\leq (R-r)^{-\rho}+O(1)$

$$\log\frac{1}{R-r'}\leq \log\frac{1}{R-r}+O(1).$$

一方 $T_p(x)$ の増加性及び $x' \notin E$ なることより

$$T_{p+1}(x) \leq T_{p+1}(x') \leq O\left(\frac{1}{(R-x')^{\rho}}\right) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^{\rho}}\right) + O(1)$$

よって (i)(ii) より十分 R に近いすべての x について

$$T_{p+1}(x) \leq O\left(\frac{1}{(R-x)^{\rho}}\right).$$

これは $\rho_{p+1} \leq \rho$ を意味し、$\rho_p < \rho$ なる ρ は任意であったから $\rho_{p+1} \leq \rho_p$。同様に命題 2, II) (6) を用いれば

$$\rho_p \leq \rho_{p+1}.$$

が得られ、$\rho_p < \infty$ の場合の結果を得る。ある $\rho_p = \infty$ の場合、もし $\rho_q < \infty$ なる q が1つでも存在すれば、上の議論により、すべての位数は有限。よって $\rho_p = \infty$ に矛盾し、すべての $T_p(x)$ の位数は無限大でなければならない(証明終)。

<u>定理 2.</u>

すべての $T_p(x)$ の劣位数は等しい。

<u>証明</u>. I) $R = \infty$ の場合: ある p について $0 < \lambda_p \leq \infty$ の場合について証明すれば十分である。そうでなければ、すべての劣位数は零で等しい。よって $\lambda_p > 0$ とする。このとき、$0 < \lambda < \lambda_p$ なる任意の λ に対して $x_3 \geq x_1$ なる x_3 が存在して、$x \geq x_3$ なる任意の x に対して

$$T_p(x) \geq x^{\lambda}.$$

ここで命題 2 I), (3) を適用する。(i) $x \notin E$, $x \geq x_3$ なる任意の x に対して

$$r^{\lambda} \leq \left(1+\frac{1}{p-1}+\varepsilon\right) T_{p-1}(r) + O(\log r) \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

(ii) $r \geq r_3$, $r \notin E$ なる任意の r を考える。かかる r を含み、Eに含まれる最長区間の左端点を r'' とし、$\mu = \lambda$ ととれば

$$r^{\lambda} - r''^{\lambda} = \lambda \int_{r''}^{r} t^{\mu-1} dt \leq \lambda \int_{E} t^{\mu-1} dt = O(1)$$

よって　　$r^{\lambda} \leq r''^{\lambda} + O(1)$.

十分大なる r について $r'' \notin E$ かつ $T_p(r)$ は増加函数であるから

$$\begin{aligned} r'' &\leq \left(1+\frac{1}{p-1}+\varepsilon\right) T_{p-1}(r'') + O(\log r'') \\ &\leq \left(1+\frac{1}{p-1}+\varepsilon\right) T_{p-1}(r) + O(\log r'') \end{aligned}$$

よって (i), (ii) より十分大きな r について、r がEに属するか否かにかかわらず

$$r^{\lambda} \leq \left(1+\frac{1}{p-1}+\varepsilon\right) T_{p-1}(r) + O(\log r) + O(1)$$

が成立する。これは $\lambda \leq \lambda_{p-1}$ を意味し、$\lambda < \lambda_p$ なる λ の任意性より、$\lambda_p \leq \lambda_{p-1}$。同様に (3) の代りに (4) から議論をはじめれば、$\lambda_{p-1} \leq \lambda_p$ が得られる。よって λ_p のうち1つでも零でなければ、すべての λ_p は零でなく等しい。

II) $R < \infty$ の場合：命題2. II) を適用することにより、$R = \infty$ の場合と同様に証明出来る。

<u>定理3.</u>

$T_p(r)$ が有限位数ならば、任意の $\alpha > 1$ に対して

I) $R = \infty$ の場合：十分大なるすべての r に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(r) \leq \alpha^2 \log T_p(r) + O(\log r) + O(1)$$

II) $R<\infty$ の場合：R に近いすべての r に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(r) \leq \alpha^2 \log T_p(r) + O\left(\log\frac{1}{R-r}\right) + O(1)$$

が成立する。

<u>証明</u>　I) $R=\infty$ の場合、$T_1(r)$ の位数 $\rho_1<\infty$ とする。このとき定理1より、すべての $T_p(r)$ の位数は $\rho_p=\rho_1$ 。よって $\rho>\rho_1$ なる任意の ρ に対して、$r_4 \geq R_0$ なる r_4 が存在して、

$$T_p(r) \leq r^\rho \quad (r \geq r_4)$$

であり、任意の p-ad A^p (Weyl [5]) に対して

$$N_p(r, A^p) \leq T_p(r) + C_p$$

だから

(7)　$$n_p(r, A^p)\log 2 \leq \int_r^{2r} n_p(t, A^p)\frac{dt}{t} \leq N_p(2r, A^p) \leq O(r^\rho)$$

ここに、C_p は A^p に依存しないことに注意する。

ここで命題1で $\mu=\rho$ とおくと

(8)　$$2\tilde{\Omega}_p(r) \leq \alpha^2 \log T_p(r) + \rho(\alpha+1)\log r + O(1)$$

が $E \subset [R_0, \infty)$ かつ $\int_E r^{\rho-1}dr<\infty$ なる閉集合 E の外で成立する。

一方 $r \in E$, $r \geq r_4$ なる任意の r に対して、r を含み、E に含まれる最長区間の右端点を $\hat{r}$ とすると

(9)　$$\hat{r}^\rho - r^\rho = \rho\int_r^{\hat{r}} t^{\rho-1}dt \leq \rho\int_E t^{\rho-1}dt = O(1)$$

(10)　$$\log\hat{r} = \log r + O(1).$$

更に (7) と (9) より

$$N_p(\hat{r}, A^p) - N_p(r, A^p) = \int_r^{\hat{r}} n_p(t, A^p)\frac{dt}{t} \leq O\left(\int_r^{\hat{r}} t^{\rho-1}dt\right)$$

$$\leqq O\left(\int_E t^{p-1}dt\right) = O(1).$$

即ち、$N_p(\tilde{r}, A^p) \leqq N_p(r, A^p) + O(1)$.

ここで、Ahlfors [2], p8（又は Wu [5], p107）によれば

$$\mathfrak{M}_{A^p} N_p(r, A^p) = T_p(r)$$

であり、$O(1)$ は A^p に依存しないから

(11) $\quad T_p(\hat{r}) \leqq T_p(r) + O(1)$.

他方 (1) より

$$V_p(r) + T_{p+1}(r) + T_{p-1}(r) + \log\frac{r}{r_0} = \tilde{\Omega}_p(r) - \Omega_p(r_0) + 2T_p(r)$$

だから、$\tilde{\Omega}_p(r) + 2T_p(r)$ は r の増加函数であることがわかる。

よって

$$2T_p(r) + \tilde{\Omega}_p(r) \leqq 2T_p(\hat{r}) + \tilde{\Omega}_p(\hat{r}).$$

(11) に注意すれば

$$\tilde{\Omega}_p(r) \leqq \tilde{\Omega}_p(\tilde{r}) + O(1).$$

$\hat{r} \notin E$ かつ (8), (10), (11) より

$$2\tilde{\Omega}_p(r) \leqq \alpha^2 \log T_p(r) + p(\alpha+1)\log r + O(1)$$

が成立する。かくて、$r \geqq r_4$ なる任意の r に対して

$$2\tilde{\Omega}_p(r) \leqq \alpha^2 \log T_p(r) + O(\log r) + O(1)$$

が成立する。

II) $R < \infty$ の場合にも、$R = \infty$ の場合と同様に証明出来る。

定理3を用いれば、命題1から命題2を導いたのと同様にして、次の系が得られる。

系 1.

$T_1(r)$ が有限位数なら、任意の $\varepsilon > 0$ に対して r_ε が存在して、

I) $R = \infty$ の場合： $r \geq r_\varepsilon$ なる任意の r に対して

$$T_{p+1}(r) < \left(1 + \frac{1}{p} + \varepsilon\right) T_p(r) + O(\log r)$$

$$T_{p-1}(r) < \left(1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon\right) T_p(r) + O(\log r)$$

II) $R < \infty$ の場合： $r_\varepsilon \leq r < R$ なる任意の r に対して

$$T_{p+1}(r) < \left(1 + \frac{1}{p} + \varepsilon\right) T_p(r) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right)$$

$$T_{p-1}(r) < \left(1 + \frac{1}{n+1-p} + \varepsilon\right) T_p(r) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right)$$

が成立する。

$R = \infty$ のとき、もとの曲線 x が超越的、即ち

$$\lim_{r \to \infty} T_1(r) / \log r = \infty$$

なら、すべての associated curves x^p も、超越的であることは知られている（Wu [6]）。これに対応する結果として $R < \infty$ の場合には、次の定理が成立する。

定理 4.

$R < \infty$ の場合、

$$\overline{\lim_{r \to R}}\, T_1(r) / \log \frac{1}{R-r} = \infty \tag{12}$$

なら、次の様な点列 $\{s_n\}$ が存在する：

$$s_n \notin E, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = R, \quad \lim_{n\to\infty} T_p(s_n)/\log\frac{1}{R-s_n} = \infty$$
$$(p = 1, 2, \cdots, n).$$

ここに、Eは命題2.II)のそれである。

<u>証明</u>. $T_1(r)$ の位数 ρ_1 が有限なら、系1より結果は明らか。よって $\rho_1=\infty$ とする。定理1より $\rho_2=\cdots=\rho_n=\infty$ である。$\mu=0$ として、命題2.II)(6)を応用する。先づ、

$$\rho' = \overline{\lim_{r\to R,\, r\notin E}}\, T_1(r)/\log\frac{1}{R-r} = \infty$$

が成立することに注意する。実際、$\rho'<\infty$ と仮定する。Rに十分近い $\hat{r}\in E$ に対して、$\hat{r}$ を含み、Eに含まれる最長区間の左端点、右端点をそれぞれ t_1, t_2 とする。このとき $t_1, t_2 \notin E$ であるから、

$$\log\frac{1}{R-t_2} - \log\frac{1}{R-t_1} = \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{R-t}dt \leq \int_E \frac{1}{R-t}dt = O(1)$$

$$\log\frac{1}{R-t_1} < \log\frac{1}{R-\hat{r}} < \log\frac{1}{R-t_2}.$$

よって $T_1(r)$ が増加函数であることに注意すれば、

$$\frac{\log T_1(t_1)}{\log\frac{1}{R-t_2}} \leq \frac{\log T_1(\hat{r})}{\log\frac{1}{R-\hat{r}}} \leq \frac{\log T_1(t_2)}{\log\frac{1}{R-t_1}}.$$

又

$$\lim_{\hat{r}\to R} \log\frac{1}{R-t_1}\Big/\log\frac{1}{R-t_2} = 1.$$

よって

$$\overline{\lim_{\substack{\hat{r}\to R\\ \hat{r}\in E}}}\, \log T_1(\hat{r})/\log\frac{1}{R-\hat{r}} \leq \overline{\lim_{\substack{r\to R\\ r\notin E}}}\, \log T_1(r)/\log\frac{1}{R-r} = \rho'.$$

これは $T_1(x)$ の位数が有限であることを意味し、仮定に矛盾する。よって $\rho' = \infty$。これは $\{s_n\} \subset [x_1, \infty) - E$, $s_n \to R$ $(n \to \infty)$, かつ $\lim_{n\to\infty} T_1(s_n) / \log \frac{1}{R - s_n} = \infty$ なる $\{s_n\}$ の存在を意味する。

この結果を $p = 2, \cdots, n$ に対して、命題 2. II) (6) に適用すれば、結論を得る（証明終）。

系 2. Weyl [5], p 201 における "仮定 A" は、次の様な仮定によっておきかえられる。

" $R < \infty$ の場合、x が admissible で

$$\lim_{x \to R} T_1(x) / \log \frac{1}{R - x} = \infty \quad "。$$

注意 以上の議論で得られた事柄を、Weyl [5] 等の方法に適用すれば、そこで与えられているよりも精密な「Defect relations」が得られることは容易にわかる。

引用文献

[1] L. V. Ahlfors, Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys-Math. 8-10(1935), 1-14.

[2] L. V. Ahlfors, The theory of meromorphic curves. Acta Soc. Sci. Fenn. 3-4(1941), 3-31.

[3] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica 7(1933), 5-31.

[4] M. Cowen and P. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature. J. d'Analyse Math. 29(1976), 93-153.

[5] H. Weyl and J. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves. Ann. of Math. Studies 12(1943) 269pp.

[6] H. Wu, The equidistribution theory of holomorphic curves. Ann. of Math. Studies 64(1970), 219pp.